Avant-propos

Ce livre est une invitation au plaisir de l'exercice et à l'exercice du plaisir. Plaisirs de l'évidence ou de la prise de tête, suivant les cas ; plaisir de la difficulté surmontée ; plaisirs, enfin, du jeu et de l'instruction.

Sont rassemblés dans ce fascicule des énigmes ou exercices mathématiques, de niveaux très variés, dans des domaines divers de la mathématique. Ce sont des thèmes ou des questions que j'ai imaginés ou glanés tout au long de ma carrière de mathématicien. Ils ne prétendent pas tous à l'originalité, loin de là, et certains sont de grands classiques. (J'ai noté la référence quand je connaissais une origine de l'énoncé.)

Le choix de ces énoncés est tout à fait arbitraire et ne correspond à aucun autre critère que celui de la curiosité ludique, sous une seule contrainte : tous les problèmes proposés sont élémentaires, au sens que les mathématiciens donnent à cet adjectif, c'est-à-dire que leur résolution ne nécessite aucun outil sophistiqué, aucune théorie avancée. Précisément, le bagage mathématique du lycée est suffisant pour les aborder. Certains problèmes (piste verte) peuvent être abordés avec le bagage mathématique du collège et de l'imagination.

Comme il apparaît immédiatement dans la table des matières, les énoncés sont regroupés par domaine. Quatre niveaux de difficulté sont identifiés, mais cela est tout à fait discutable car il n'existe pas d'échelle objective de la difficulté, qui peut être celle d'une intuition, d'une évidence logique ou d'un calcul. Ces niveaux sont identifiés par une couleur et par ordre croissant : vert , bleu, rouge et noir [1].

La seconde partie de ce fascicule propose des solutions à tous les problèmes proposés (ou au moins des indications claires pour y parvenir). Et ici vient la recommandation importante de cet avant-propos : il est parfaitement inutile, tant au niveau de l'apprentissage mathématique que du plaisir intellectuel, de lire une solution toute faite avant d'avoir avancé soi-même vers une solution ou d'avoir souffert (un peu) pour y parvenir. Enfin, si j'espère que ces solutions sont exactes, il ne faut pas les voir comme modèles absolus ; il y a bien souvent d'autres pistes à explorer et d'autres rédactions possibles.

---

1. Idée de couleurs empruntée à l'excellent site de vulgarisation "Images des mathématiques", http ://images.math.cnrs.fr/.

La mathématique est une science ancienne et une science du livre. Il existe énormément de très bons traités sur tous les sujets effleurés ici ; ces traités présentent une science structurée, contrairement au présent ouvrage qui relève de la botanique aléatoire et élémentaire [2].

Mais attention, le fait que les mathématiques reposent sur un socle stable n'indique pas qu'elles constituent une science figée ; c'est au contraire une science foisonnante dans laquelle chaque réponse à une question posée ouvre de nouvelles questions, une science dans laquelle tous les progrès sont librement partagés internationalement, une science dans laquelle les chercheurs du monde entier parlent la même langue. Malheureusement, le mouvement de cette science n'est pas facilement perçu hors de ses acteurs eux-mêmes. Ce livre n'a pas la prétention de rendre perceptible la dynamique des mathématiques, mais d'entretenir et de renforcer la curiosité de ceux qui voudront les approcher. C'est peut-être le livre que j'aurais aimé avoir entre les mains quand j'étais au lycée.

Décembre 2021.

2. Si je devais recommander un livre, c'est sans hésitation le magistral traité de Richard Courant et Herbert Robbins "What is mathematics ?" que je citerais. Il date du milieu du siècle précédent mais n'a pas pris une ride, d'autant plus que la récente édition française ("Qu'est-ce que les mathématiques ?" éd. Cassini, 2015) est accompagnée de notes d'actualisation. Quant aux informations que l'on peut trouver sur l'internet, il faut dire que les fiches mathématiques de Wikipédia sont la plupart du temps excellentes. Elles apportent des solutions (donc, à ne pas regarder trop vite !), des éclairages et extensions à nombre d'énoncés proposés dans ce recueil.

Table des matières

Première partie

Énoncés

1. Géométrie

1.1. Pythagore.

Savez-vous démontrer le théorème de Pythagore ?

(Plusieurs centaines de démonstrations différentes ont été recensées par des mathématiciens.)

Quelles démonstrations vous suggèrent chacune des deux figures suivantes ?

Figure 1.

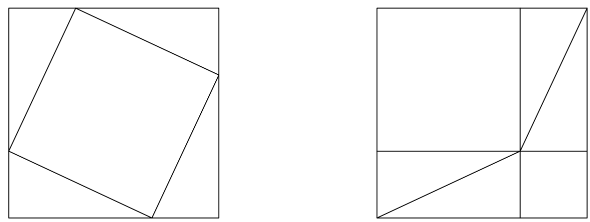
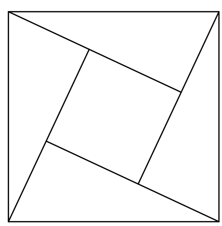
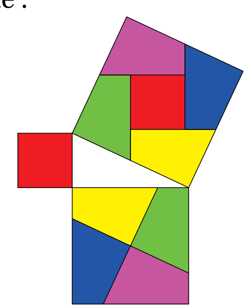


Figure 2.

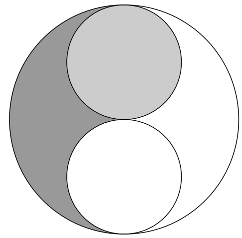


Expliquez l'illustration suivante :



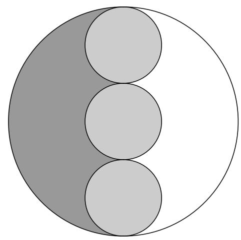
1.2. Coloriages.

Comparer les aires des deux zones grisées.



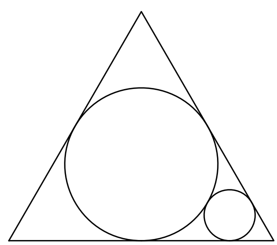
1.3. Coloriages (bis).

Comparer l'aire du domaine gris clair et l'aire du domaine gris foncé.



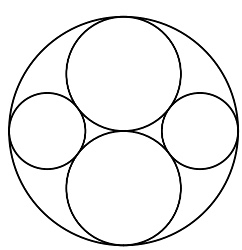
1.4. Cercles tangents.

Le triangle est équilatéral. Quel est le rapport du rayon du petit cercle au rayon du grand cercle ?

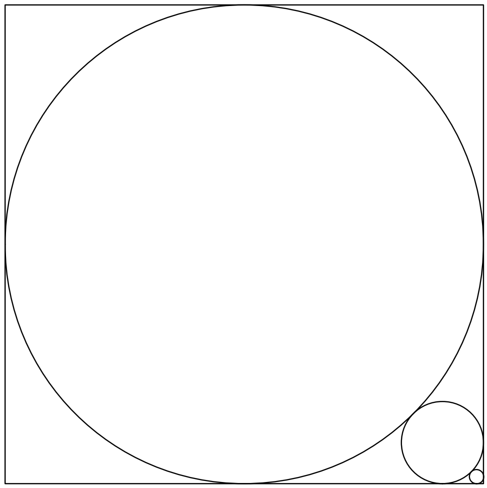


1.5. Cercles tangents (bis).

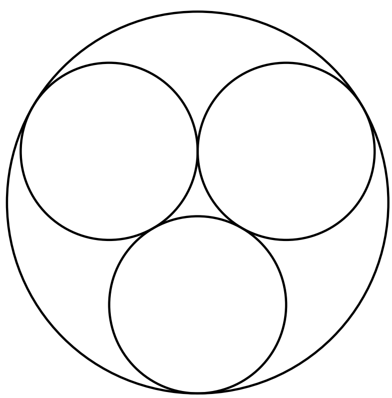
Quel est le rapport du rayon des deux plus petits cercles au rayon du plus grand ?



1.6. Cercles tangents (ter).
Quel est le rapport du rayon du tout petit cercle à celui du grand cercle ?



1.7. Cercles tangents (quater).
Quel est le rapport du rayon du grand cercle à celui des trois autres ?



1.8. Cercle circonscrit au triangle équilatéral.
Soient A, B et C trois points du plan euclidien formant un triangle équilatéral. Démontrer que, pour tout point P du plan, on a

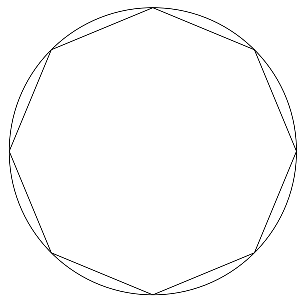
$$PA + PB \geq PC,$$

et que l'égalité $PA + PB = PC$ est réalisée si et seulement si P est sur l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ du cercle passant par les points A, B et C.

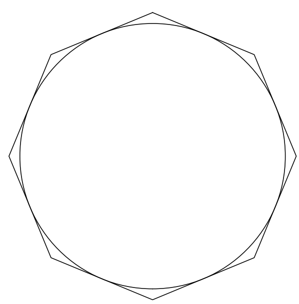
(On note ici PA la distance entre les points P et A.)

1.9. Polygone approchant le cercle.

Q1. Si n est un nombre entier ≥ 3, on note s_n la longueur du côté du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de rayon 1. Exprimer s_{2n} en fonction de s_n. (La simple connaissance du théorème de Pythagore permet de répondre à cette question. Une voie plus courte et un peu plus savante utilise la trigonométrie.)



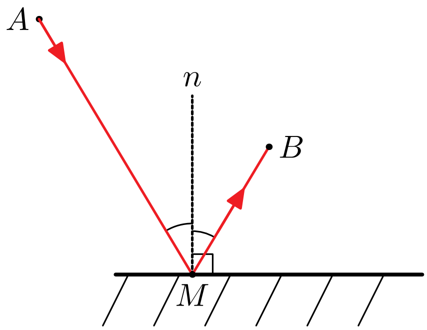
Q2. Si n est un nombre entier ≥ 3, on note t_n la longueur du côté du polygone régulier à n côtés circonscrit au cercle de rayon 1. Exprimer t_{2n} en fonction de t_n. (La simple connaissance du théorème de Pythagore permet de répondre à cette question. Une voie plus courte et un peu plus savante utilise la trigonométrie.)



Q3. Calculer le périmètre du polygone régulier à 16 côtés inscrit dans le cercle de rayon 1 et le périmètre du polygone régulier à 16 côtés circonscrit au cercle de rayon 1. En déduire un encadrement du nombre π.

1.10. Loi de la réflexion.

La loi de la réflexion (dite de Snell-Descartes) s'applique à la réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir ou au rebond d'une boule (sans effet!) sur une bande du billard. Cette loi stipule que le *mobile* se déplaçant dans un plan suivant une ligne droite sera réfléchi au moment de la rencontre avec l'obstacle dans une direction telle que *l'angle de réflexion* sera égal à *l'angle d'incidence*. Cela est illustré par le dessin suivant :



Le mobile est issu du point A et réfléchi vers le point B. Le point M est le point de réflexion et la direction (Mn) est perpendiculaire à l'obstacle. L'angle d'incidence $\widehat{AMn}$ est égal à l'angle de réflexion $\widehat{nMB}$.

On suppose que le bord de l'obstacle est rectiligne et non limité.

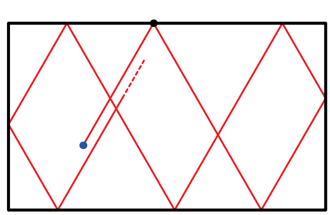
Question. Démontrer que le chemin AMB est le plus court chemin reliant les points A et B et rencontrant l'obstacle.

En d'autres termes, on pourrait dire que le mobile soumis à la loi de la réflexion *choisit* le plus court chemin reliant les points et rencontrant l'obstacle.

Indication : un simple dessin donne la réponse à la question posée.

1.11. Billard polygonal.

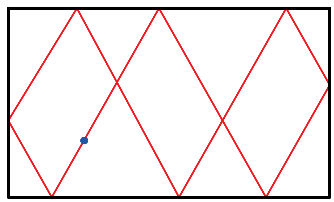
Les mathématiciens aiment jouer au billard. En un sens, ils compliquent le jeu puisqu'ils considèrent des tables de formes diverses ; mais ils le simplifient aussi considérablement car, au moins dans un premier temps, ils ne considèrent qu'une seule boule, assimilée à un point qui se déplace sans frottement. Pas de frottement sur le tapis, donc la boule avance en ligne droite et ne ralentit pas. Pas de frottement sur les bandes, donc la loi de la réflexion (voir exercice précédent) s'applique. Une *trajectoire du billard* sur une table donnée est caractérisée par ces deux règles ; elle se représente par une ligne brisée qui n'a pas de fin. Voici un exemple de représentation (du début) d'une trajectoire dans un billard rectangulaire.



Dans la figure précédente, on a représenté la trajectoire issue du point bleu et pointant vers le point noir qui est le point de premier rebond.

Le rebond de la boule est mal défini si celle-ci arrive exactement dans un coin du billard. Les trajectoires qui aboutiraient un jour dans un coin sont dites *singulières.* (En un sens très précis on peut montrer qu'elles sont exceptionnelles.)

Particulièrement remarquables sont les *trajectoires périodiques.* Elles apparaissent quand la boule repasse en un point où elle est passée antérieurement et avec la même direction. Ces trajectoires *bouclent indéfiniment sur elles-mêmes.* En voici une illustration.



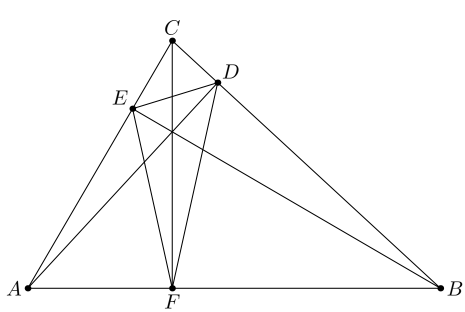
(Pour les curieux : dans les deux figures précédentes le rectangle a pour longueur 17 et largeur 10 ; dans la première figure la pente de la trajectoire au départ du point bleu est $\sqrt{3} \approx 1,73$; dans la seconde la pente de la trajectoire au départ du point bleu est $30/17 \approx 1,76$.)

Question. On suppose que notre table de billard est limitée par un polygone régulier. Démontrer que toute trajectoire issue d'un point de la table de billard dans une direction parallèle à un côté du polygone et ne pointant pas vers un sommet du polygone est non singulière et périodique.

Indication : on commencera bien sûr par regarder ce qui se passe pour les premiers polygones réguliers : le triangle équilatéral, le carré, le pentagone et l'hexagone réguliers.

1.12. Trajectoires périodiques du billard triangulaire.

Soit ABC un triangle du plan euclidien dont les trois angles sont aigus. Cette condition est équivalente au fait que les *pieds des hauteurs* issues de chacun des sommets sont sur les côtés du triangle. On note respectivement D, E et F les points d'intersection des hauteurs issues des sommets respectifs A, B et C avec le côté opposé au sommet.



Démontrer que le triangle DEF est une trajectoire périodique du billard triangulaire, c'est-à-dire que la parcours $DEFDE$ obéit à la loi de la réflexion sur les côtés du triangle. Une autre façon de formuler cette affirmation est de dire que l'orthocentre du triangle ABC est le point de concours des bissectrices du triangle DEF.

Remarques.

1. Le triangle DEF est appelé le *triangle orthique* du triangle ABC. Il est le triangle inscrit de périmètre minimal.

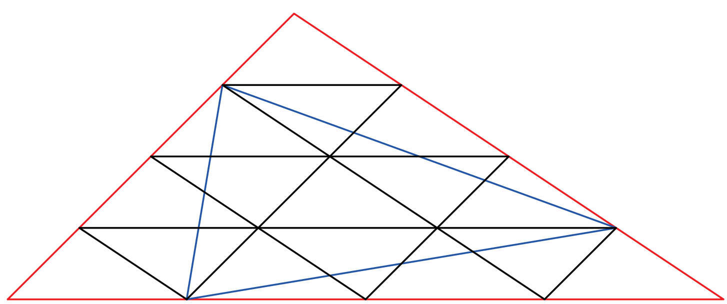
2. L'existence d'une trajectoire périodique du billard triangulaire pour un triangle général est un problème ouvert et célèbre[2].

1.13. Découpage d'un triangle en sept parts égales.

Monsieur Thalès possède un champ triangulaire et souhaite le partager équitablement entre ses sept descendants. Un partage équitable est un partage en lots d'égales aires. Il ne dispose pas d'instrument de mesure, mais seulement d'instruments de tracé, la règle et le compas (cf exercice 9.1).

Comment Thalès peut-il s'y prendre?

Une solution est donnée par la figure suivante. Saurez-vous la déchiffrer?



Avez-vous une autre solution à proposer?

1.14. Chemin le plus court sur une planète rectangulaire.

Sur une boîte parallélépipédique rectangle – comme une boîte à chaussures – deux points sont marqués. Comment déterminer le plus court chemin tracé sur la boîte et reliant ces deux points?

2. Pour en savoir plus on peut lire un billet de Pascal Hubert dans “Images des mathématiques" : http ://images.math.cnrs.fr/Billard-polygonal-et-trajectoires-periodiques.